Domácí úkol ze cvičení 13 – jako příprava na příští (poslední) cvičení
(pak můžeme to, co budeme řešit na cvičení, vybírat podle vašich přání):

Zopakujte si větu o implicitní funkci a promyslete, prosím, jak větu aplikovat (třeba zkuste něco z uvedených příkladů) a připravte si, prosím, případné dotazy:

1. Ukažte, že rovnicí $F(x,y)=0$ je v okolí bodu (x_0,y_0) definována implicitně funkce $y=f(x)$.
   Pak a) vypočítejte $f'(x_0)$ a $f''(x_0)$;
   b) napište rovnici tečny ke křivce, dané rovnicí $F(x,y)=0$ v bodě (x_0,y_0) (a všimněte si, že $\nabla F(x_0,y_0)$ je vektor normály k této tečně v bodě (x_0,y_0);
   c) aproximujte funkci $f(x)$ v okolí bodu x_0 pomocí Taylorova polynomu 2.stupně,
   když: i) $F(x,y)=x^2-y^3+x^2y-1$, $(x_0,y_0)=(1,0)$
   ii) $F(x,y)=xy-e^x+e^y$, $(x_0,y_0)=(0,0)$ (z minulého dú).

2. Je dána rovnice $e^{z-2x}-xz+2yz-2y-xy^2=0$.
   a) Ukažte, že touto rovnicí je definována implicitně funkce $z=f(x,y)\in C^2(U(1,1))$, pro kterou je $f(1,1)=2$.
   b) Určete $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1)$.
   c) Pomocí lineární aproximace určete přibližně hodnoty $f(x,y)$ v okolí bodu $(1,1)$.

3. a) Dokažte, že rovnicí $2x^2+2y^2+z^3+8xz-z+8=0$ je definována implicitně v okolí bodu $(-2,0,1)$ funkce $z=f(x,y), f\in C^2(U(-2,0))$.
   b) Ukažte, že bod $(-2,0)$ stacionárním bodem funkce $f(x,y)$.
   c) Nabývá funkce $z=f(x,y)$ v bodě $(-2,0)$ lokální extrém?

4. a) Nechť funkce $F(x,y,z)$ má spojité parciální derivace prvního řádu v okolí bodu (x_0,y_0,z_0) a nechť platí $F(x_0,y_0,z_0)=0$. Odvoďte rovnici tečné roviny k ploše, dané rovnicí $F(x,y,z)=0$ v bodě (x_0,y_0,z_0) za předpokladu, že aspoň jedna z parciálních derivací 1.řádu funkce F je v bodě (x_0,y_0,z_0) nenulová. (a opět si všimněte, že $\nabla F(x_0,y_0)$ je vektor normály k tečné rovině k dané ploše v bodě (x_0,y_0,z_0);
   b) Napište rovnici tečné roviny a vektorovou rovnici normály v bodě (1, 2, -1) k ploše, dané rovnicí
   $$x^3+y^3+z^3+xyz-6=0 .$$

A promyslete také větu o Lagrangeových multiplikátorech a její užití při hledání vázaných extrémů funkce (a něco zkuste vyřešit) :

Vyšetřete globální extrémy funkce f na množině M, je-li:

a) $f(x,y)=6-4x-3y$, $M=\{(x,y);\ x^2+y^2\le 1\}$
b) $f(x,y)=x^2+2y^2$, $M=\{(x,y)\in R^2;\ x^4+y^4=1\}$
c) $f(x,y,z)=x+y+z$, $M=\{(x,y,z)\in R^3; x^2+y^2\le z<1\}$
d) $f(x,y,z)=x-2y+2z$, $M=\{(x,y,z)\in R^3;\ x^2+y^2+z^2=1\}$
e) $f(x,y,z)=xy+z^2$, $M=\{(x,y,z)\in R^3;\ x^2+y^2+z^2\le 1\wedge x\ge 0\}$;